VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

O různých analytických metodách řešení autonomních homogenních lineárních soustav obyčejných diferenciálních rovnic.

The different analytical methods for solving linear systems of autonomous homogeneous ordinary differential equations.

2013 Martina Lellková

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Zadání bakalářské práce

Student: **Martina Lellková**

Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103R031 Výpočetní matematika

Téma: O různých analytických metodách řešení autonomních homogenních lineárních soustav obyčejných diferenciálních rovnic.
The different analytical methods for solving linear systems of autonomous homogeneous ordinary differential equations.

Zásady pro vypracování:

Cílem práce je nastudovat některé známé alternativy metod řešení homogenních lineárních soustav ODR s konstantními koeficienty a otestováním porovnat jejich efektivitu, popřípadě otázky šíření chyby v závislosti na nepřesných vstupech.
The goal is to study some of the known alternative methods for solving systems of linear homogeneous ODE with constant coefficients and testing to compare their effectiveness, or to the issue of errors based on inaccurate inputs.

Seznam doporučené odborné literatury:

Nagy,J.: Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic. Praha, MVŠT, SNTL 1983,
KALAS, Josef - RÁB, Miloš. Obyčejné diferenciální rovnice. Vyd. 2. Brno : Masarykova univerzita, 2001. 207 pp. ISBN 80-210-2589-1,
M. Braun: Differential Equations and Their Applications. Springer Verlag (1993),
Avoiding the Jordan Canonical Form in the Discussion of Linear Systems with Constant Coefficients
E. J. Putzer:
The American Mathematical Monthly
Vol. 73, No. 1 (Jan., 1966), pp. 2-7

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Bohumil Krajc, Ph.D.**

Datum zadání: 16.11.2012
Datum odevzdání: 07.05.2013

doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry

prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně. Uvedla jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpala.

V Ostravě 7. května 2013

Lelková

Chtěla bych především poděkovat Mgr. Bohumilu Krajcovi, Ph.D. za jeho neocenitelnou pomoc při psaní mé bakalářské práce a za čas, který pro mě obětoval. Dále chci poděkovat všem lidem, kteří mě při mé práci podporovali, zejména své rodině.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá různými analytickými metodami řešení homogenních lineárních soustav obyčejných diferenciálních rovnic. V úvodních kapitolách se stručně popisují vybrané pojmy z lineární algebry, vlastnosti vektorových funkcí reálné proměnné a soustav homogenních lineárních obyčejných diferenciálních rovnic. Pak už se dostáváme k popisu čtyř metod-metoda rozkladu na Jordanův kanonický tvar, metoda rozkladu, Putzerova metoda, metoda rozvoje konečným polynomem. Metody jsou následně implementovány v programu Maple a je heuristicky porovnávána jejich efektivita, která je popsána v závěru této práce.

Klíčová slova: soustavy homogenních obyčejných diferenciálních rovnic, vlastní čísla, vlastní vektory, standardní fundamentální matice

Abstract

This bachelor thesis deals with various analytical methods for solving homogeneous linear systems of ordinary differential equations. The introductory chapters briefly describe selected concepts of linear algebra and properties of vector functions of real variables and homogeneous linear systems of ordinary differential equations. Then we get to the description of four methods-the Jordan canonical form, the method of decomposition, the Putzer's method, the method of development to final polynomial. The methods are implemented in Maple program and we also compare their efficiency, which is described at the end of this thesis.

Keywords: system of homogenous ordinary differential equations, eigenvalues, eigenvectors, standard fundamental matrix

Obsah

1 Úvod **2**

2 Vybrané pojmy z lineární algebry **3**
- 2.1 Vlastní číslo a vlastní vektor 3
- 2.2 Lineární nezávislost vektorů 3
- 2.3 Lineární kombinace vektorů 3
- 2.4 Báze 3
- 2.5 Hodnost a defekt matice 3
- 2.6 Regulární matice 4
- 2.7 Řetězec zobecněných vlastních vektorů 4
- 2.8 Podobnost matic 4
- 2.9 Jordanův kanonický tvar 4

3 Poznámky o derivování vektorových funkcí **11**

4 Základní vlastnosti homogenních lineárních soustav obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu **12**

5 Homogenní lineární soustavy odr s konstantními koeficienty **14**
- 5.1 Využití rozkladu na Jordanův kanonický tvar 14
- 5.2 Metoda rozkladu 17
- 5.3 Putzerova metoda 22
- 5.4 Metoda rozvoje konečným polynomem 25

6 Příklady implementace metod v programu Maple **28**
- 6.1 Implementace metody rozkladu 28
- 6.2 Implementace Putzerovy metody 30
- 6.3 Implementace metody rozvoje konečným polynomem 31

7 Závěr **34**

8 Reference **35**

Přílohy **35**

A Měření **36**

1 Úvod

Diferenciální rovnice mají širokou škálu uplatnění jak v přírodních vědách, např. ve fyzice, biologii, chemii, tak i ve společenských vědách, např. v sociologii. Tématem této bakalářské práce je popis řešení homogenních lineárních soustav obyčejných diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty pomocí různých metod. K nalezení těchto řešení se hodně využívají poznatky z lineární algebry.

První kapitola pro připomenutí popisuje vybrané definice a tvrzení z lineární algebry. Při jejich definici jsem vycházela zejména z literatury [4],[5] a [6]. Druhá kapitola připomíná některá pravidla pro práci s vektorovými funkcemi jedné reálné proměnné, která je nezbytnou součástí každého systému obyčejných diferenciálních rovnic (domluvme se na zkratce odr). Ve třetí kapitole se popisují elementy teorie soustav lineárních homogenních odr, můžeme se zde setkat např. s větou o existenci a jednoznačnosti. V další kapitole se už dostáváme k popisu jednotlivých metod. Nejprve ilustrujeme jak lze při řešení lineárních homogenních soustav odr využít převodu matice na Jordanův kanonický tvar. Další je metoda rozkladu, která je rovněž vnitřně spjata s Jordanovým kanonickým tvarem matice. Třetí je Putzerova metoda, pomocí které hledáme standardní fundamentální matici. Využíváme zde hlavně operace s maticemi a řešení konkrétních jednoduchých diferenciálních rovnic. Třetí podkapitola popisuje metodu rozvoje konečným polynomem, u které je hlavním principem najít řešení soustavy rovnic a následné vytvoření standardní fundamentální matice stejně, jako u předchozích metod. Kromě popsané teorie a důkazů u každé metody najdeme i jednoduché řešené příklady. Od čtenáře se očekává základní znalost lineární algebry a obyčejných diferenciálních rovnic. Byly použity publikace [1]-[5]. Poslední kapitola se zabývá implementací každé metody v programu Maple za pomocí balíků lineární algebry. Najdeme zde popis jednotlivých kódů, které čtenář může najít i na přiloženém CD. Každý krok ve všech metodách je popsán pro lepší orientaci v kódech.

V závěru se popisuje efektivnost metod při řešení konkrétních soustav. Jsou porovnávány časy, které vznikli průměrem deseti měřených časů za sebou u každé metody. Pro porovnání bylo měření provedeno i pro maplovskou funkci exponential, která přímo poskytuje standardní fundamentální matici soustavy. Detailní výsledky experimentů jsou obsaženy v příloze.

2 Vybrané pojmy z lineární algebry

V této kapitole si připomeneme definice vybraných pojmů z lineární algebry.

2.1 Vlastní číslo a vlastní vektor

Definice 2.1 *Nechť A je čtvercová matice typu nxn. Nechť existuje číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ a nenulový vektor $u \in \mathbb{C}^n$ takový, že platí*

$$Au = \lambda u.$$

Potom číslo λ nazveme vlastním číslem matice A a u nazveme vlastním vektorem matice A, který náleží vlastnímu číslu λ.

Podobně číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ a nenulový vektor $u \in \mathbb{C}^n$ nazveme vlastním číslem a vlastním vektorem lineárního zobrazení $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (popřípadě $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$), pokud $Tu = \lambda u$.

2.2 Lineární nezávislost vektorů

Definice 2.2 *Vektory $v_1, ..., v_k$ jsou nezávislé, jestliže pro libovolnou k-tici čísel $\alpha_1, ..., \alpha_k$, pro kterou platí*

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = 0,$$

platí také

$$\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0.$$

2.3 Lineární kombinace vektorů

Definice 2.3 *Vektor v z vektorového prostoru U nazveme lineární kombinací vektorů $v_1, ..., v_k \in V$, máme-li k dispozici skaláry $\alpha_1, ..., \alpha_k$ takové, že platí*

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k.$$

2.4 Báze

Definice 2.4 *Bází vektorového prostoru nazveme podmnožinu ε vektorového prostoru U za podmínek:*

1.ε je lineárně nezávislá množina

2. Každý vektor $u \in U$ můžeme dostat jako vhodnou lineární kombinaci vektorů z ε.

Je-li ε složena z s prvků, pak píšeme $dimU = s$ a hovoříme o dimenzi U.

2.5 Hodnost a defekt matice

Definice 2.5 *Hodností matice nazýváme číslo určující počet lineárně nezávislých řádků matice. Defektem matice pak dimenzi nulového prostoru této matice.*

2.6 Regulární matice

Definice 2.6 *Regulární maticí nazveme takovou čtvercovou matici, která má stejnou hodnost jako je její řád.*

2.7 Řetězec zobecněných vlastních vektorů

Definice 2.7 *Nechť A je čtvercová matice a nechť λ je vlastní číslo matice A. Systém vektorů $(v_1, ..., v_m)$ nazveme řetězcem zobecněných vlastních vektorů matice A náležících vlastnímu číslu λ a m nazveme délkou tohoto řetězce platí-li:*

$$(A - \lambda E)v_1 = 0, \; v_1 \neq 0$$

$$(A - \lambda E)v_2 = v_1$$

$$\dots$$

$$(A - \lambda E)v_m = v_{m-1}$$

O vlastním vektoru v_1 někdy mluvíme jako o posledním prvku řetězce.

Podobně systém vektorů $(v_1, ..., v_m)$ nazveme řetězcem zobecněných vlastních vektorů matice A náležících vlastnímu číslu λ i pro lineární zobrazení $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (popřípadě $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$), platí-li:

$$(T - \lambda I)v_1 = 0, \; v_1 \neq 0$$

$$(T - \lambda I)v_2 = v_1$$

$$\dots$$

$$(T - \lambda I)v_m = v_{m-1},$$

kde I představuje identické zobrazení.

2.8 Podobnost matic

Definice 2.8 *Čtvercové matice A a J jsou si podobné, existuje-li regulární matice C taková, že platí*

$$J = C^{-1}AC. \tag{1}$$

Poznámka 2.1 Lze dokázat, že při vhodné volbě bází podobné matice reprezentují stejné lineární zobrazení.

2.9 Jordanův kanonický tvar

V této kapitole si popíšeme co je to vlastně Jordanův kanonický tvar. Začněme definicí Jordanova bloku. Vycházíme přitom z publikací [4] a [5].

2.9.1 Jordanův blok

Definice 2.9 *Nechť je dáno komplexní číslo λ. Komplexní matici řádu mxm nazveme Jordanovým blokem (nebo Jordanovou buňkou), jestliže je ve tvaru*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Poznámka 2.2 Matice je tedy tvořena Jordanovým blokem pokud
a) Všechny prvky na diagonále jsou stejné.
b) Každý prvek bezprostředně nad diagonálním prvkem je 1.
c) Všechny ostatní prvky jsou 0.

2.9.2 Vlastnosti Jordanova bloku

Až do konce textu se dohodněme na vyhrazení symbolů

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pro označení prvků standardní báze v $\mathbb{R}^n$.

Věta 2.1 *Jestliže matice J je Jordanův blok, přímým výpočtem se lze snadno přesvědčit, že platí:*

$$(J - \lambda E)e_1 = 0$$
$$(J - \lambda E)e_2 = e_1$$
$$(J - \lambda E)e_3 = e_2$$
$$\dots$$
$$(J - \lambda E)e_m = e_{m-1}.$$

Poznamenejme, že uvedené vztahy můžeme zapsat také takto

$$Je_1 = \lambda e_1$$
$$Je_2 = \lambda e_2 + e_1$$
$$Je_3 = \lambda e_3 + e_2$$
$$\dots$$
$$Je_m = \lambda e_m + e_{m-1}.$$

Poznámka 2.3 Vektory z předchozí věty tedy tvoří řetězec zobecněných vlastních vektorů.

Příklad 2.1
Pro další úvahy se bude hodit představa o tvaru mocnin speciálního Jordanova bloku. Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$. Uvažujme Jordanovu buňku ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Zřejmě platí, že pro $\lambda \neq 0$ jde o regulární matici. Pak singulární matice $J - \lambda E$ (sama o sobě představující speciální případ Jordanovy buňky) je tvaru

$$J - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Přitom mocniny této matice vznikají posunem sloupců této matice doprava a doplněním zleva o nulové sloupce. Skutečně, snadno se přesvědčíme, že:

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

Z tvaru Jordanova bloku také bezprostředně plyne následující tvrzení

Věta 2.2 *$(J - \lambda E)^m = 0$ a zároveň $(J - \lambda E)^i \neq 0$, pro každé přirozené $i < m$.*

Poznámka 2.4 Tvoří-li vektory $e_1, e_2, ..., e_m$ řetězec vlastního čísla λ, pak někdy píšeme:

$$J - \lambda E : e_m \to e_{m-1} \to \ldots \to e_2 \to e_1 \to 0.$$

2.9.3 Jordanův kanonický tvar

Definice 2.10 *Řekněme, že matice J řádu mxm je v Jordanově kanonickém tvaru, jestliže je blokově diagonální a jednotlivé její bloky jsou Jordanovými buňkami. Tedy*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & J_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & J_n \end{pmatrix}, \tag{2}$$

kde $J_1, ..., J_n$ jsou Jordanovy buňky.

Poznámka 2.5 Lze ukázat, že prohodíme-li pořadí Jordanových bloků, dostaneme matici, která je podobná matici J. Dále můžeme nahlédnout, že J má přesně tolik bloků, kolik má lineárně nezávislých vlastních vektorů.

2.9.4 Jordanova báze

Definice 2.11 *Nechť matice A je typu nxn. Báze $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ v $\mathbb{C}^n$ se nazývá Jordanova báze matice A pokud se skládá pouze z řetězců zobecněných vlastních vektorů.*

Poznámka 2.6 Má-li tedy matice A pouze jediný vlastní vektor b_1 příslušný λ, lze psát:

$$Ab_1 = \lambda b_1$$

$$Ab_2 = \lambda b_2 + b_1$$

$$Ab_3 = \lambda b_3 + b_2$$

$$\dots$$

$$Ab_n = \lambda b_n + b_{n-1}.$$

Níže ukážeme, že ke každé čtvercové matici A existuje Jordanova báze. To ovšem znamená, že A musí být podobná nějaké matici J v Jordanově kanonickém tvaru. Matice A, J totiž odpovídají stejné lineární transformaci T. Matice A reprezentuje T při volbě standardní báze $(e_1, ..., e_n)$, zatímco odpovídající Jordanova matice reprezentuje T při volbě Jordanovy báze matice A. Ve vztahu (1) je pak matice C tvořena sloupci Jordanovy báze B (při zachování pořadí).

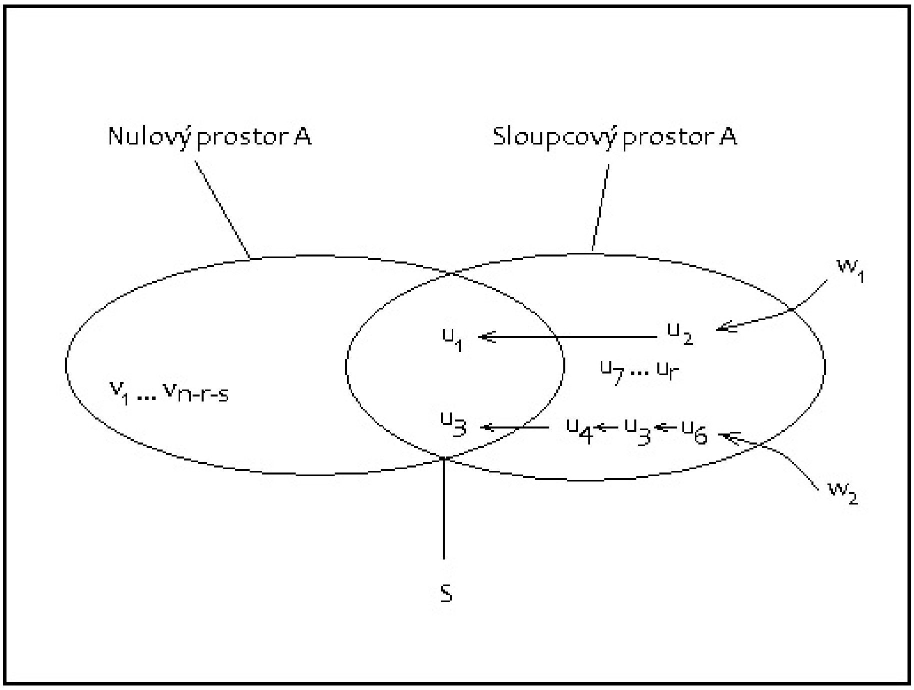
2.9.5 Existence Jordanovy báze pro čtvercové matice

Našim cílem nyní bude dokázat existenci Jordanovy báze pro všechny čtvercové matice. Vychází se z důkazu v publikaci [5], str. 446.

Důkaz. Víme, že pokud λ je vlastní číslo matice A, nula je vlastní číslo matice $A - \lambda E$. Najdeme-li v tomto případě regulární matici C podle (1) můžeme tvrdit, že rovnost $C^{-1}AC = J$ je ekvivalentní s rovností $C^{-1}(A - \lambda E)C = \tilde{J} - \lambda E$ a to je také Jordanův kanonický tvar. Díky tomu se můžeme omezit pouze na případ, kdy matice A má vlastní číslo 0. Budiž dána lineární transformace $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ reprezentovaná maticí A. Jordanova báze matice A je rovněž Jordanovou bází T. Nyní postupujme na základě principu matematické indukce.

Nechť $n = 1$. Pak $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a zřejmě existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ (totiž $\lambda = 0$) takové, že pro každé $v \in \mathbb{C}$ platí $T(v) = \lambda v$. Hledanou bází je tedy libovolný nenulový vektor v.

Nyní nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Protože 0 je vlastní číslo A, hodnost matice A je menší než n, označme ji r. Označme T' zúžení T na sloupcový prostor A, to je $T'(v) = T(v)$, pro každé v náležící sloupcovému prostoru matice A. Dále, nechť je $B' = (u_1, u_2, ..., u_r)$ (podle indukčního předpokladu) Jordanovou bází tohoto operátoru. Buď S průnikem sloupcového a nulového prostoru matice A. Nenulové vektory ležící v S ležící jsou tedy



Obrázek 1:

vlastními vektory A v sloupcovém prostoru A odpovídající vlastnímu číslu 0. Tyto vektory zároveň odpovídají vlastním vektorům T' s vlastním číslem 0. Z toho plyne, že S je nulový prostor T'. Nechť J' představuje matici lineární transformace T', která je příslušným Jordanovým kanonickým tvarem.

Lze tvrdit, že vždy je poslední řádek každého Jordanova bloku v J' nulový. Z toho nám vyplývá, že defekt T' je roven přesnému počtu nulových řádků v J'. Buď $dim(S) = s$. Zřejmě s je počet nulových řádků J'. Můžeme také říci, že počet nulových řádků udává počet řetězců. s tedy určuje počet řetězců. Nyní pro ilustraci uvažujme situaci zobrazenou na obrázku 1, když $s = 2$.

Máme dva řetězce v sloupcovém prostoru A.

$$u_2 \to u_1 \to 0 \quad a \quad u_6 \to u_5 \to u_4 \to u_3 \to 0$$

Nulový prostor A má dimenzi $n-r$. Dostáváme tak $n-r-s$ vlastních vektorů $v_1, v_2, ..., v_{n-r-s}$ A, které nepatří do sloupcového prostoru A a s vlastních vektorů z S.

Protože u_2 patří do sloupcového prostoru A, a současně je prvním prvkem řetězce v tomto prostoru, nutně musí existovat vektor w_1 ležící mimo sloupcový prostor A a současně takový, že $Aw_1 = u_2$ (sloupcový prostor A totiž představuje obor hodnot operátoru T). Podobně platí $Aw_2 = u_6$. Obecně tedy každý řetězec, který končí v S lze „protáhnout"o jeden vektor.

Uvažujme nyní takto získanou n-tici vektorů:

$$(u_1, ..., u_r, w_1, ..., w_s, v_1, ..., v_{n-r-s}).$$

Zřejmě zbývá dokázat, že uvedená n-tice tvoří lineární nezávislý systém. Předpokládejme, že platí

$$\sum_{i=1}^{r} a_i u_i + \sum_{j=1}^{s} c_j w_j + \sum_{k=1}^{n-r-s} d_k v_k = 0.$$

Víme, že vektory v_k leží v nulovém prostoru A. Proto, jestliže přenásobíme obě strany rovnosti maticí A, dostaneme

$$\sum_{i=1}^{r} a_i A u_i + \sum_{j=1}^{s} c_j A w_j = 0.$$

Au_i můžeme psát ve tvaru λu_i nebo $\lambda u_i + u_{i-1}$. Díky tomu lze tvrdit, že první suma je lineární kombinací vektorů u_i . Navíc zdůrazněme, že žádný ze zmíněných vektorů Au_i není na začátku řetězce. Zároveň každý z Aw_j ve druhém sčítanci leží na začátku řetězce. Odtud plyne, že

$$\sum_{i=1}^{r} a_i A u_i = \sum_{j=1}^{s} c_j A w_j = 0$$

a následně také, že $c_1 = 0, ..., c_r = 0$. Odtud zpětně

$$\sum_{i=1}^{r} a_i u_i + \sum_{k=1}^{n-r-s} d_k v_k = 0.$$

Protože

$$\sum_{i=1}^{r} a_i u_i \in S,$$

nutně

$$\sum_{i=1}^{r} a_i u_i = \sum_{k=1}^{n-r-s} d_k v_k = 0.$$

Nyní plyne z lineární nezávislosti vektorů $u_1, ..., u_r$, že $a_1 = ... = a_r = 0$ a podobně z lineární nezávislosti vektorů $v_1, ..., v_{n-r-s}$, že $d_1 = ... = d_{n-r-s} = 0$. Tímto je dokázána lineární nezávislost.

∎

Postup nalezení Jordanova kanonického tvaru si ukážeme na následujícím příkladu. Další ukázka je v podkapitole (5.1).

Příklad 2.2
Najděte Jordanův kanonický tvar matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení: Nejdříve najděme vlastní čísla matice A. Těmi jsou $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = \lambda_4 = 3$. Protože algebraická násobnost vlastních čísel λ_1, λ_2 je jedna, ihned dokážeme určit dva bloky: $[1]$ a $[-1]$. Nyní vypočteme další blok. S volbou $\lambda = 3$ dostáváme

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Čtenář si jistě ověří, že hodnost uvedené matice je rovna 3 a defekt matice je proto 1. To znamená, že pro vlastní číslo 3 existuje jediný lineárně nezávislý vlastní vektor a tedy jeden Jordanův blok. Protože v předchozím postupu jsme již popsali tři lineárně nezávislé vektory, velikost tohoto bloku je nutně 2.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\,0 \\ 0 & -1 & 0\,0 \\ 0 & 0 & 3\,1 \\ 0 & 0 & 0\,3 \end{pmatrix}.$$

■

Na základě rozkladu matice v Jordanův kanonický tvar lze dokázat následující důležité tvrzení.

Věta 2.3 *(Cayleyova-Hamiltonova věta)*
Matice A vyhovuje své charakteristické rovnici, tedy

$$A^n + c_1 A^{n-1} + ... + c_{n-1} A + c_n E = 0,$$

kde

$$det(A - \lambda E) = (-1)^n (\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + ... + c_{n-1}\lambda + c_n = 0$$

je charakteristická rovnice matice A.

3 Poznámky o derivování vektorových funkcí

Nechť je dána vektorová funkce $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Pak derivací této funkce budeme rozumět funkci

$$\varphi' = (\varphi_1', ..., \varphi_n').$$

Poznámka 3.1 Vektorové funkce tedy derivujeme po složkách.

Podobně budeme postupovat i u derivací komplexních vektorových funkcí reálné proměnné. Nechť $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ a $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ jsou vektorové funkce. Pak zobrazení $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ definované předpisem

$$\psi(t) = u(t) + iv(t)$$

nazveme komplexní vektorovou funkcí. Funkci $\psi' : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ definovanou vztahem

$$\psi'(t) = u'(t) + iv'(t)$$

nazveme derivací funkce ψ.

Poznámka 3.2 Komplexní vektorové funkce tedy také derivujeme po složkách a to tak, že zvlášť reálnou a zvlášť imaginární složku.

Analogicky se operace derivování definuje i pro maticové funkce.

Příklad 3.1
Snadno vypočteme:

$$\begin{pmatrix} 33t^2 + ie^{2t} \\ \sin t + i\cos t \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 66t + i2e^{2t} \\ \cos t - i\sin t \end{pmatrix}.$$

■

Poznámka 3.3 Dále ještě využijeme vztahu:

$$\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow (e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}.$$

4 Základní vlastnosti homogenních lineárních soustav obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu

Homogenní soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu si můžeme představit ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + ... + a_{1n}(t)x_n \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + ... + a_{2n}(t)x_n \\ &\cdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + ... + a_{nn}(t)x_n, \end{aligned}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro všechna $i = 1, 2, ..., n$ a $j = 1, 2, ..., n$.

Soustavu můžeme vyjádřit v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & ... & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & ... & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & ... & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

Soustavu (3) lze vyjádřit také stručněji

$$x' = A(t)x, \tag{4}$$

kde A je označení příslušné maticové funkce.

Věta 4.1 *(O existenci a jednoznačnosti)*

Nechť J je otevřený interval. Nechť $t_0 \in J, x_0 \in \mathbb{R}^n$. K soustavě (4) přidejme podmínku

$$x(t_0) = x_0, \tag{5}$$

čímž získáváme Cauchyovu úlohu. Nechť reálné funkce a_{ij} definované na J, pro každé $i = 1, 2, ..., n$ a $j = 1, 2, ..., n$, jsou spojité. Potom existuje právě jedno řešení φ, Cauchyovy úlohy (4) a (5) na J.

Uveďme pojem pro komplexní řešení soustavy lineárních homogenních odr.

Definice 4.1 *Nechť J je otevřený interval. Nechť $\psi : J \to \mathbb{C}^n$. Nechť existují reálné vektorové funkce r a s, které jsou řešením $x' = Ax$ na J. Pak řekneme, že $\psi = r + is$ je komplexním řešením (4 na J.*

Poznámka 4.1 Derivací $\psi = r + is$, dostáváme

$$\psi' = r' + is',$$

takže ψ je komplexním řešením soustavy (4 na J, právě když na J platí

$$\psi'(t) = A(t)\psi(t).$$

Označme $H = \{\varphi : \varphi$ je reálné řešení (4) na $J\}$. Lze ukázat, že H je reálným vektorovým prostorem dimenze n.

Označme dále $H_c = \{\psi : \psi$ je komplexní řešení (4) na $J\}$. Lze ukázat, že H_c je reálným vektorovým prostorem dimenze n nad tělesem komplexních čísel.

Definice 4.2 *Bázi prostoru H říkáme fundamentální systém řešení homogenní soustavy (4) na J.*

Poznámka 4.2 Podobně můžeme hovořit o komplexním fundamentálním systému, který je tvořen bází H_c.

Definice 4.3 *Standardní fundamentální maticí soustavy (4) na otevřeném intervalu J nazýváme takovou maticovou funkci U, že platí:*

$$U(0) = E,$$

$$U'(t) = A(t)U(t).$$

Poznámka 4.3 Sloupce matice U tedy tvoří vhodný fundamentální systém soustavy (4).

5 Homogenní lineární soustavy odr s konstantními koeficienty

5.1 Využití rozkladu na Jordanův kanonický tvar

Jordanový kanonický tvar matice jsme si popsali v kapitole o lineární algebře, nyní se věnujme jeho aplikaci na soustavy homogenních lineárních odr s konstantními koeficienty. Uvažujme soustavu odr s konstantní reálnou maticí A:

$$x' = Ax. \tag{6}$$

Na základě předchozích úvah lze matici A vždy vyjádřit v Jordanově kanonickém tvaru

$$A = C^{-1}JC.$$

Dosadíme-li za A do (6) dostáváme

$$x' = C^{-1}JCx.$$

Převeďme ekvivalentně:

$$(Cx)' = JCx.$$

Dále použijme substituci $y = Cx$. Po její aplikaci můžeme poslední soustavu zapsat ve tvaru

$$y' = Jy.$$

Dostáváme soustavu rovnic, kterou už lze snadno vyřešit v rámci jednotlivých Jordanových bloků. Po sestrojení řešení uvedené soustavy rovnic musíme ještě zavést zpětnou substituci $x = C^{-1}y$. Po nalezení komplexní fundamentální soustavy řešení pak hledáme standardní fundamentální matici soustavy.

5.1.1 Implementace Jordanova kanonického tvaru na konkrétním příkladu

```
> restart;
> with(Student[LinearAlgebra]):
> with(linalg):
> with(LinearAlgebra):
```

Zadání vstupní matice

```
> A:=Matrix([[-13,5,4,2],[0,-1,0,0],[-30,12,9,5],[-12,6,4,1]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Výpočet vlastnho čísla, jeho algebraická násobnost a vlastní vektory

```
> m:=Eigenvectors(A,output='list');
```

$$m := \left[\left[-1,\, 4,\, \left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\0\\0\\1\end{bmatrix},\, \begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}\right]\right]$$

Počet řádků matice soustavy

```
> r:=RowDimension(A);
```

$$r := 4$$

Generování jednotkové matice

```
> E:=Matrix(r,shape=identity):
```

Vytvoření matice (A- λ_1E)

```
> C:=(A-m[1][1].E);
```

$$C := \begin{bmatrix}-12 & 5 & 4 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\\-30 & 12 & 10 & 5\\-12 & 6 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

```
> v[1]:=m[1][3][1]:v[3]:=m[1][3][2]:
```

Vlastní vektory přiřazeny do proměnné v_1, v_3. Byla provedena kontrola řešitelnosti: řešení soustavy lineárních rovnic (A+E)v=0 lze zapsat v parametrickém tvaru $\alpha\, v_1 + \beta\, v_3 = p$. Parametry α, β musíme najít tak, aby vhodný vlastní vektor byl koncovým bodem zobecněného řetězce. Máme štěstí, zvolíme-li α=1 a β=0 dostáváme vektor $\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\0\\0\\1\end{bmatrix}$, který zmíněnou vlastnost má. Volbou α=0 a β=1 dostáváme podobně další vhodný vektor: $\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\0\\1\\0\end{bmatrix}$. Toto se projeví tak, že následující soustavy budou řešitelné.

Nalezení dalšího prvku řetězce v_2 podle vztahu (A- λ_1E) v_2= v_1.

```
> v[2]:=LinearSolve(C,v[1]);
```

$$v_2 := \begin{bmatrix} \_t_1 \\ \frac{5}{6} \\ \_t_3 \\ 6\,\_t_1 - 2 - 2\,\_t_3 \end{bmatrix}$$

Snaha o nalezení dalšího prvku řetězce vede k chybovému varování, což znamená, že neexistuje řešení. Tím pádem jsme dostali řetězec vektorů délky 2:

```
> v:=LinearSolve(C,v[2]);

Error, (in LinearAlgebra:-LinearSolve) inconsistent system
```

Stejný postup použijeme i pro druhý vlastní vektor, byla provedena kontrola řešitelnosti:

```
> v[4]:=LinearSolve(C,v[3]);
```

$$v_4 := \begin{bmatrix} \_t1_1 \\ \frac{-1}{3} \\ \_t1_3 \\ 6\,\_t1_1 + 1 - 2\,\_t1_3 \end{bmatrix}$$

Opět máme řetězec délky 2.

```
> v[5]:=LinearSolve(C,v[4]);

Error, (in LinearAlgebra:-LinearSolve) inconsistent system
```

Nalezli jsme potřebné dva řetězce zobecněných vlastních vektorů. Sestavení Jordanovy báze:

```
> T:=v[1]:
> for ss from 2 to r do
> T:=<T|v[ss]>;
> end do:
> _t[1]:=1: _t[3]:=0: _t1[1]:=1: _t1[3]:=0: T;
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Vytvoření inverzní matice k T.

```
> TT:=inverse(T);
```

$$TT := \begin{bmatrix} 258 & -108 & -86 & -42 \\ -12 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -30 & 12 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

Vytvoření Jordanova kanonického tvaru zadané matice

```
> g:=1:l:=1:
> for gg from 1 to 2 do
> j[g]:=m[1][1]*y[l]+y[l+1];g:=g+1;l:=l+1;
> j[g]:=m[1][1]*y[l];g:=g+1;l:=l+1;
> end do:
> L:= [seq(j[i],i=1..r)]:H:= [seq(y[i],i=1..r)]:
> J:=genmatrix(L,H);
```

$$J := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vytvoření matice podle vztahu z'=Jz odpovídající fundamentálnímu řešení soustavy.

```
> Z:=Matrix([[exp(-1*t),exp(-t)*t,0,0],[0,exp(-1*t),0,0],[0,0,
> exp(-1*t),exp(-t)*t],[0,0,0,exp(-1*t)]]);
```

$$Z := \begin{bmatrix} e^{(-t)} & e^{(-t)}\,t & 0 & 0 \\ 0 & e^{(-t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{(-t)} & e^{(-t)}\,t \\ 0 & 0 & 0 & e^{(-t)} \end{bmatrix}$$

Výsledná fundamentální matice podle vzorce U=T*Z*TT.

```
> U:=evalm(T&*Z&*TT);
```

$$U := \begin{bmatrix} e^{(-t)} - 12\,e^{(-t)}\,t & 5\,e^{(-t)}\,t & 4\,e^{(-t)}\,t & 2\,e^{(-t)}\,t \\ 0 & e^{(-t)} & 0 & 0 \\ -30\,e^{(-t)}\,t & 12\,e^{(-t)}\,t & e^{(-t)} + 10\,e^{(-t)}\,t & 5\,e^{(-t)}\,t \\ -12\,e^{(-t)}\,t & 6\,e^{(-t)}\,t & 4\,e^{(-t)}\,t & e^{(-t)} + 2\,e^{(-t)}\,t \end{bmatrix}$$

5.2 Metoda rozkladu

Yopakujme, že homogenní soustavy odr s konstantními koeficienty lze vyjádřit ve tvaru

(7) $$x' = Ax,$$

kde A je konstantní reálná čtvercová matice n-tého řádu. K nalezení standardní fundamentální matice soustavy (7) budeme potřebovat následující značení a úmluvy:

Nechť λ_1,λ_2,...,λ_k jsou všechna navzájem různá vlastní čísla matice A. Nechť m_1,m_2,...,m_k jsou jejich algebraické násobnosti, to znamená, že platí

$$det(A-\lambda E) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}...(\lambda-\lambda_k)^{m_k}.$$

Nechť $s \in N$ a $\xi \in \mathbb{C}^n$. Označme

$$N_\lambda^{[s]} = \{\xi \in \mathbb{C}^n : (A-\lambda E)^s\xi = 0\}. \tag{8}$$

Poznamenejme, že $N_\lambda^{[s]}$ je zřejmě lineárním prostorem.

Nechť $j \in \{1,2,...,k\}$ a $\xi \in \mathbb{C}^n$. Uvažujme funkci $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$. definovanou předpisem

$$\psi(t) = e^{\lambda_j t}\sum_{l=0}^{m_j-1}\frac{(A-\lambda_j E)^l\xi}{l!}t^l. \tag{9}$$

Věta 5.1 *Vzorcem (9) zadaná funkce ψ je řešením (7) na $\mathbb{R}$ právě tehdy, když $\xi \in N_{\lambda_j}^{m_j}$.*

Důkaz. I. Nejprve pro jednoduchost tvrzení dokážeme pro $m_j = 1$. Z (9) dostáváme $\psi(t) = \xi e^{\lambda_j t}$. Zřejmě platí:

$$\psi'(t) = A\psi(t) \iff (\xi e^{\lambda_j t})' = A(\xi e^{\lambda_j t}) \iff \lambda_j\xi e^{\lambda_j t} = A\xi e^{\lambda_j t} \overset{(a)}{\iff} (A-\lambda_j E)\xi e^{\lambda_j t} = 0 \iff$$

$$\iff (A-\lambda_j E)^1\xi = 0 \overset{(b)}{\iff} \xi \in N_{\lambda_j}^{[1]}.$$

(a) Od levé i pravé strany odečteme $\lambda_j\xi e^{\lambda_j t}$a následně vytkneme $\xi e^{\lambda_j t}$.

(b) Podle (8).

II. Nyní provedeme důkaz pro $m_j \in \mathbb{N}/\{1\}$. Pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí:

$$\psi'(t) = A\psi(t) \iff \left((e^{\lambda_j t}\sum_{l=0}^{m_j-1}\frac{(A-\lambda_j E)^l\xi}{l!}t^l)' = A\psi(t)\right) \iff$$

$$\iff \left(\lambda_j\psi(t) + e^{\lambda_j t}\sum_{l=1}^{m_j-1}\frac{(A-\lambda_j E)^l\xi}{(l-1)!}t^{l-1} = A\psi(t)\right) \overset{(a)}{\iff}$$

$$\iff \left((A-\lambda_j E)e^{\lambda_j t}\sum_{l=1}^{m_j-1}\frac{(A-\lambda_j E)^{l-1}\xi}{(l-1)!}t^{l-1} = (A-\lambda_j E)\psi(t) \right) \overset{\text{(b)}}{\iff}$$

$$\iff \left((A-\lambda_j E)e^{\lambda_j t}\sum_{l=0}^{m_j-2}\frac{(A-\lambda_j E)^{l}\xi}{l!}t^{l} = (A-\lambda_j E)\psi(t) \right) \overset{\text{(c)}}{\iff}$$

$$\iff (A-\lambda_j E)e^{\lambda_j t}\left(\sum_{l=0}^{m_j-2}\frac{(A-\lambda_j E)^{l}\xi}{l!}t^{l} + e^{\lambda_j t}\frac{(A-\lambda_j E)^{m_j-1}\xi}{(m_j-1)!}t^{m_j-1}\right) -$$

$$-e^{\lambda_j t}\frac{(A-\lambda_j E)^{m_j-1}\xi}{(m_j-1)!}t^{m_j-1} = (A-\lambda_j E)\psi(t) \overset{\text{(d)}}{\iff}$$

$$\iff \left((A-\lambda_j E)(\psi(t) - e^{\lambda_j t}\frac{(A-\lambda_j E)^{m_j-1}\xi}{(m_j-1)!}t^{m_j-1}) = (A-\lambda_j E)\psi(t) \right) \iff$$

$$\iff \left(-e^{\lambda_j t}\frac{(A-\lambda_j E)^{m_j}\xi}{(m_j-1)!}t^{m_j-1} = 0 \right) \iff (A-\lambda_j E)^{m_j}\xi = 0 \overset{\text{(e)}}{\iff} \xi \in N_{\lambda_j}^{[m_j]}.$$

(a) Odečteme od levé i pravé strany $\lambda_j\psi(t)$ a poté vytkneme $(A-\lambda_j E)$.

(b) Dochází k přeindexování v sumě.

(c) Na levé straně rovnosti přičteme a odečteme $e^{\lambda_j t}\frac{(A-\lambda_j E)^{m_j-1}\xi}{(m_j-1)!}t^{m_j-1}$.

(d) Využijeme (9).

(e) Podle (8).

■

Nyní postupně ukážeme, že pomocí (9) lze získat všechna řešení (7).

Věta 5.2 *Platí:*

1)

$$dim N_{\lambda_j} = m_j.$$

2)

$$\lambda_j \neq \lambda_i \Longrightarrow N_{\lambda_j}^{[m_j]} \cap N_{\lambda_i}^{[m_i]} = \{0\}.$$

Důkaz. V tomto důkazu budeme využívat vlastností Jordanova kanonického tvaru J matice A soustavy.

I.Víme, že platí $A = C^{-1}JC$. Odečtením $\lambda_j E$ od obou stran rovnice dostáváme

$$(A - \lambda_j E) = C^{-1}JC - \lambda_j C^{-1}EC = C^{-1}\tilde{J}C,$$

kde $\tilde{J} = J - \lambda_j E$ je matice v kanonickém tvaru. Tuto poslední rovnost umocněme na m_j:

$$(A - \lambda_j E)^{m_j} = (C^{-1}\tilde{J}C)^{m_j} = C^{-1}\tilde{J}C \cdot C^{-1}\tilde{J}C \cdot ... \cdot C^{-1}\tilde{J}C = C^{-1}(\tilde{J})^{m_j}C.$$

Umocníme-li $\tilde{J}$ na m_j, bloky vlastního čísla 0 (odpovídající v J vlastnímu číslu λ_j) se vynulují. Zbývající bloky v $\tilde{J}$ mají na diagonále nenulové prvky. Z toho plyne, že defekt $\tilde{J}^{m_j}$ je roven m_j. Po přenásobení regulární maticí se defekt nezmění, čímž se dostáváme k platnosti tvrzení 1).

II. Uvažujme Jordanovu bázi matice A:

$$B = (b_1, ..., b_r, b_{r+1}, ..., b_s, ...).$$

Nejprve si všimněme, že je-li $b_l \in B$ vektorem odpovídajícím vlastnímu číslu λ_k, potom nutně

$$(A - \lambda_k E)^{m_k} b_l = 0.$$

Platí totiž:

$$(A - \lambda_k E)^{m_k} b_l = (A - \lambda_k E)^{m_k - 1} b_{l-1} = ... = (A - \lambda_k E)^1 b_j = 0,$$

protože b_j je posledním prvkem příslušného řetězce zobecněných vlastních vektorů a tedy vlastním vektorem matice A. Je-li nyní$\lambda_j \neq \lambda_i$, pak $N_{\lambda_i}^{[m_i]}$ je podle 1) lineárním obalem přesně těch m_i prvků Jordanovy báze B, které odpovídají λ_i. Současně $N_{\lambda_j}^{[m_j]}$ vzniká jako lineární obal těch odlišných prvků z B, které odpovídají λ_j. Odtud

$$N_{\lambda_j}^{[m_j]} \cap N_{\lambda_i}^{[m_i]} = \{0\},$$

což jsme chtěli dokázat. ∎

Poznámka 5.1 Součet algebraických násobností všech vlastních čísel matice A n-tého řádu je n. Jordanova báze B matice A obsahuje právě n prvků. Odtud plyne, že dosadíme-li tyto prvky do (9) postupně za ξ (s příslušnou volbou vlastních čísel), získáme n-tici funkcí $\psi^{[1]}, ..., \psi^{[n]}$, které představují řešení soustavy (7). Protože ve vztahu (9) platí $\psi(0) = \xi$, n-tice $\psi^{[1]}, ..., \psi^{[n]}$ představuje bázi prostoru všech řešení soustavy (7) na $\mathbb{R}$.

Z provedených úvah je patrné, že místo báze B můžeme postupně volit libovolné báze prostorů $N_{\lambda_1}^{[m_1]}, ..., N_{\lambda_k}^{[m_k]}$. Utvořme nyní maticovou funkci $M : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, jejíž sloupce jsou tvořeny (libovolně získanou) bází řešení soustavy (7) na $\mathbb{R}$. Uvažujme maticovou funkci U definovanou vztahem

$$U(t) = M(t) \cdot M^{-1}(0).$$

Protože sloupce $U(t)$ reprezentují lineární kombinace uvažovaného fundamentálního systému řešení, jsou také řešeními (7). Navíc, $U(0) = M(0) \cdot M^{-1}(0) = E$. Tedy U reprezentuje standardní fundamentální matici soustavy (7).

Příklad 5.1
Určeme fundamentální systém řešení soustavy

$$x_1' = -2x_1 + 4x_2$$
$$x_2' = 1x_1 + 1x_2.$$

Sestavme matici soustavy:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nejprve nalezněme vlastní čísla matice A.

$$det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)(1-\lambda) - 4 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

Dostali jsme dvě různá vlastní čísla $\lambda_1 = -3$ $(m_1 = 1)$ a $\lambda_2 = 2$ $(m_2 = 1)$. Dále zjistěme báze prostorů $N_{-3}^{[1]}$, $N_2^{[1]}$ podle (8) a komplexní řešení $\psi^{[1]}$ a $\psi^{[2]}$ podle (9).

I. $N_{-3}^{[1]}$:

$$(A + 3E)\xi = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zvolíme si např. vektor

$$\xi^{[1]} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a dosadíme podle (9)

$$\psi^{[1]}(t) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

II. $N_2^{[1]}$:

$$(A - 2E)\xi = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zvolíme si např. vektor

$$\xi^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a dosadíme podle (9)

$$\psi^{[2]}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Hledaným fundamentálním systémem řešení zadané soustavy jsou tedy sloupce maticové funkce

$$M(t) = \begin{pmatrix} -4e^{-3t} & e^{2t} \\ e^{-3t} & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

■

5.3 Putzerova metoda

Tato metoda popsána E. J. Putzerem v roce 1966 v práci [2],viz také [1], slouží pro výpočet standardní fundamentální matice $U(t)$ soustavy bez hledání Jordanova kanonického tvaru matice A.

$$x' = Ax, \; x(0) = \xi.$$

Dalo by se říci, že patří mezi nejefektivnější analytické metody pro výpočet homogenní lineární soustavy odr s konstantními koeficienty.

Věta 5.3 *Nechť λ_1,λ_2,...,λ_n jsou všechna vlastní čísla matice A, mohou být zapsána v jakémkoliv pořadí, ale v dalších krocích už je nutné toto pořadí dodržet. Každé vlastní číslo musí být v posloupnosti zapsáno tolikrát, kolik činí jeho algebraická násobnost. Utvořme posloupnost matic*

$$P_0 = E,$$

kde E je jednotková matice,

$$P_1 = (A - \lambda_1 E)P_0 = A - \lambda_1 E$$

$$\dots$$

(10) $$P_j = (A - \lambda_j E)P_{j-1} = (A - \lambda_j E)(A - \lambda_{j-1}E)...(A - \lambda_1 E)$$

$$\dots$$

$$P_{n-1} = (A - \lambda_{n-1}E)P_{n-2} = (A - \lambda_{n-1}E)(A - \lambda_{n-2}E)...(A - \lambda_1 E).$$

Dále najděme na $\mathbb{R}$ definované funkce $q_1(t)$,...,$q_n(t)$, které vyhovují vztahům

$$q_1'(t) = \lambda_1 q_1(t), \qquad q_1(0) = 1$$
$$q_2'(t) = \lambda_2 q_2(t) + q_1(t), \qquad q_2(0) = 0$$
$$\dots$$

(11) $$q_j'(t) = \lambda_j q_j(t) + q_{j-1}(t), \;\; q_j(0) = 0$$

$$\dots$$

$$q_n'(t) = \lambda_n q_n(t) + q_{n-1}(t), \; q_n(0) = 0.$$

Pak maticová funkce

(12) $$U(t) = q_1(t)P_0 + q_2(t)P_1 + ... + q_n(t)P_{n-1}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

je standardní fundamentální matice soustavy

$$x' = Ax.$$

Důkaz. Nejprve dokážeme, že platí rovnost $U(0) = E$. Po dosazení $t = 0$ do (12) dostáváme s přihlédnutím k počátečním podmínkám v (11) $U(0) = q_1(0)P_0$. Víme, že $P_0 = E$ podle (10) a $q_1(0) = 1$ podle (11). Odtud bezprostředně dostáváme potřebnou rovnost $U(0) = E$.

Nyní dokážeme, že platí rovnost $U'(t) = AU(t)$, pro všechna $t \in R$. Nejprve od levé i pravé strany dokazované rovnosti odečteme $\lambda_n U$. Pro stručnost se dohodněme, že dále nebudeme zapisovat proměnnou t. Máme tedy dokázat, že $U' - \lambda_n U = AU - \lambda_n U$. Poznamenejme, že matici (12) můžeme zapsat ve tvaru

$$U = \sum_{j=1}^{n} q_j P_{j-1}, \tag{13}$$

a její derivaci ve formě

$$U' = \sum_{j=1}^{n} q_j' P_{j-1}. \tag{14}$$

Z formálních důvodů ještě definujme $q_0 = 0$. Postupnými úpravami pak dostáváme dokazovanou rovnost:

$$U' - \lambda_n U \overset{(a)}{=} \sum_{j=1}^{n} q_j' P_{j-1} - \lambda_n \sum_{j=1}^{n} q_j P_{j-1} \overset{(b)}{=} \sum_{j=1}^{n} (q_j \lambda_j + q_{j-1}) P_{j-1} - \lambda_n \sum_{j=1}^{n} q_j P_{j-1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j q_j + q_{j-1} - \lambda_n q_j) P_{j-1} = \sum_{j=1}^{n} q_{j-1} P_{j-1} + \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_n) q_j P_{j-1} \overset{(c)}{=}$$

$$\overset{(c)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} q_i P_i + \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_n) q_j P_{j-1} \overset{(d)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} q_i P_i + \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_n) q_j P_{j-1} \overset{(e)}{=}$$

$$\overset{(e)}{=} \sum_{j=1}^{n-1} q_j (P_j + (\lambda_j - \lambda_n) P_{j-1}) \overset{(f)}{=} \sum_{j=1}^{n-1} q_j ((A - \lambda_j E) P_{j-1} + (\lambda_j - \lambda_n) P_{j-1}) \overset{(g)}{=}$$

$$\overset{(g)}{=} \sum_{j=1}^{n-1} q_j (A - \lambda_n E) P_{j-1} = (A - \lambda_n E) (\sum_{j=1}^{n-1} q_j P_{j-1}) =$$

$$= (A - \lambda_n E) [(\sum_{j=1}^{n-1} q_j P_{j-1} + q_n P_{n-1}) - q_n P_{n-1}] \overset{(h)}{=} (A - \lambda_n E) (\sum_{j=1}^{n-1} q_j P_{j-1} - q_n P_{n-1}) \overset{(i)}{=}$$

$$\overset{(i)}{=} (A - \lambda_n E)(U - q_n P_{n-1}) = (A - \lambda_n E)U - q_n(A - \lambda_n E)P_{n-1} \overset{(j)}{=}$$

$$\overset{(j)}{=} (A - \lambda_n E)U = AU - \lambda_n U$$

(a) Dosadíme za U a U' podle (13) a (14).

(b) Dosadíme za q'_j podle (11).

(c) Dochází k přeindexování $i = j - 1$.

(d) Víme, že $q_0 = 0$.

(e) Zpátky přeindexujeme i na j.

(f) Dosadíme za P_j podle (10).

(g) Matice s koeficientem λ_j se vyruší.

(h) $q_n P_{n-1}$ připojíme k součtu.

(i) Opět využijeme (13).

(j) Podle Cayleyovy-Hamiltonovy věty je $(A-\lambda_n E)P_{n-1} = (A-\lambda_n E)(A-\lambda_{n-1}E)...(A-\lambda_1 E) = 0$.

■

Příklad 5.2
Najděme řešení ve tvaru standardní fundamentální matice soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x'_1 &= 7x_1 + 3x_2 \\ x'_2 &= 2x_1 + 6x_2. \end{aligned}$$

Sestavme matici

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Nejdříve najděme vlastní čísla matice A.

$$det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)(6-\lambda) - 6 \Rightarrow \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0.$$

Dostali jsme dvě různá vlastní čísla $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$. Poněvadž matice A je řádu 2, stačí nám vypočítat podle (10) matice P_0 a P_1.

$$P_0 = E$$
$$P_1 = (A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dále najděme funkce q_1 a q_2 podle (11):

$$q_1'(t) = 9q_1(t), \qquad q_1(0) = 1$$
$$q_2'(t) = 4q_2(t) + q_1(t), \qquad q_2(0) = 0.$$

Můžeme použít např. metodu separace proměnných a vyjde nám

$$q_1(t) = e^{9t}$$
$$q_2(t) = (\frac{1}{5}e^{5t} - \frac{1}{5})e^{4t}.$$

Nyní máme vše, co potřebujeme a můžeme dosadit do vzorce (12):

$$U(t) = q_1(t)P_0 + q_2(t)P_1 = e^{9t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (\frac{1}{5}e^{5t} - \frac{1}{5})e^{4t}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{5}e^{9t} + \frac{2}{5}e^{4t} & \frac{3}{5}(e^{5t} - 1)e^{4t} \\ \frac{2}{5}(e^{5t} - 1)e^{4t} & \frac{2}{5}e^{9t} + \frac{3}{5}e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Tímto jsme dostali naši hledanou standardní fundamentální matici soustavy. ■

5.4 Metoda rozvoje konečným polynomem

Další metoda řešení homogenní soustavy odr s konstantními koeficienty (7) je založena na vyjádření standardní fundamentální matice U ve tvaru mocninné maticové řady:

(15)
$$U(t) = e^{At} = E + At + \frac{(At)^2}{2!} + ... + \frac{(At)^k}{k!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}, t \in \mathbb{R}.$$

Poznámka 5.2 Dosazením $t = 0$ do (15) dostáváme $U(0) = E$. Derivací (15) (jde o lokálně stejnoměrnou konvergentní řadu) dostáváme:

$$U'(t) = A + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2!} + ... + \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} + ... = A\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = AU(t), t \in \mathbb{R}$$

Čímž je (15) dokázán.

Připomeňme, že podle Cayleyovy-Hamiltonovy věty vyhovuje matice A své charakteristické rovnici, tedy

(16) $$A^n + c_1 A^{n-1} + ... + c_{n-1}A + c_n E = 0,$$

kde

(17) $$det(A - \lambda E) = (-1)^n(\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_{n-1}\lambda + c_n = 0$$

je charakteristická rovnice matice A.

Z (16) vyplývá, že mocninu A^n lze vyjádřit ve tvaru

$$A^n = -c_1 A^{n-1} - c_2 A^{n-2} - ... - c_{n-1}A - c_n E$$

a to znamená, že každá matice A^k s $k \geq n$ je lineární kombinací $E, A, A^2, ..., A^{n-1}$. Tím se dostáváme k existenci funkcí $b_0, b_1, ..., b_{n-1}$ takových, že platí:

(18) $$e^{At} = U(t) = b_0(t)E + b_1(t)A + ... + b_{n-1}(t)A^{n-1}, t \in \mathbb{R}.$$

Jestliže číslo λ_0 je vlastním číslem matice A, pak platí:

(19) $$\lambda_0^n + c_1\lambda_0^{n-1} + ... + c_{n-1}\lambda_0 + c_n = 0,$$

Z (19) vyplývá, že vlastní číslo λ_0 lze vyjádřit ve tvaru

$$\lambda_0^n = -c_1\lambda_0^{n-1} - c_2\lambda_0^{n-2} - ... - c_{n-1}\lambda_0 - c_n$$

a to znamená, že λ_0^k můžeme vyjádřit kombinací hodnot $E, \lambda_0, \lambda_0^2, ..., \lambda_0^{n-1}$. Tím se dostáváme opět k existenci funkcí $b_0, b_1, ..., b_{n-1}$ (stejných jako v (18)) takových, že platí:

(20) $$e^{\lambda_0 t} = b_0(t)E + b_1(t)\lambda_0 + ... + b_{n-1}(t)\lambda_0^{n-1}, t \in \mathbb{R}.$$

Pokud má matice A navzájem různá vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, pak neznámé funkce $b_0, b_1, ..., b_n$ můžeme nalézt pomocí n lineárních algebraických rovnic

(21)

$$\begin{aligned} b_0(t) + b_1(t)\lambda_1 + ... + b_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} &= e^{\lambda_1 t} \\ b_0(t) + b_1(t)\lambda_2 + ... + b_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1} &= e^{\lambda_2 t} \\ &\cdots \\ b_0(t) + b_1(t)\lambda_n + ... + b_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1} &= e^{\lambda_n t}. \end{aligned}$$

Má-li některé vlastní číslo λ_0 matice algebraickou násobnost větší než 1, pak řešíme soustavu rovnic pro neznámé funkce $b_0, b_1, ..., b_n$, která vznikne postupným derivováním vztahu (20)

$$b_0(t) + b_1(t)\lambda_0 + ... + b_{n-1}(t)\lambda_0^{n-1} = e^{\lambda_0 t}$$

$$b_1(t) + ... + (n-1)b_{n-1}(t)\lambda_0^{n-2} = te^{\lambda_0 t}$$

$$\dots$$

$$(k-1)!b_{k-1}(t) + ... + (n-k)..(n-1)b_{n-1}(t)\lambda_0^{n-k-1} = t^{k-1}e^{\lambda_0 t}.$$

Aplikujeme-li tento postup pro každé vlastní číslo matice A, dostaneme systém n-lineárních algebraických rovnic pro n neznámých funkcí $b_0, b_1, ..., b_n$. Po nalezení řešení rovnic dostáváme hledanou standardní fundamentální matici U ve tvaru (15).

Příklad 5.3
Najděme standardní fundamentální matici soustavy s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Začněme nalezením vlastních čísel.

$$det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) - 2 \Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0.$$

Máme dvě různá vlastní čísla $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$. Hledaná matice bude podle (20) ve tvaru

(22) $$e^{At} = b_0(t)E + b_1(t)A,\ t \in \mathbb{R}.$$

Jelikož je násobnost u obou vlastních čísel rovna jedné, funkce b_0, b_1 budeme hledat podle (21). Dostáváme soustavu:

$$b_0(t) + 5b_1(t) = e^{5t}$$

$$b_0(t) + 2b_1(t) = e^{2t}.$$

Řešením této soustavy je

$$b_0(t) = \frac{5}{3}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{5t},\ b_1(t) = -\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{5t}.$$

Stačí už jen dosadit do vztahu (22) a dostáváme výslednou fundamentální matici

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{2}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{5t} \\ -\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{5t} & \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{5t} \end{pmatrix}.$$

■

6 Příklady implementace metod v programu Maple

6.1 Implementace metody rozkladu

```
> restart;
> with(Student[LinearAlgebra]):
> with(LinearAlgebra):
> with(linalg):
> st := time():
```

Vstupní matice

```
> A:=Matrix([[2,-2,7],[1,-1,2],[2,-2,4]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -2 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Výpis vlastních čísel, jejich algebraické násobnosti a vlastní vektory.

```
> m:=Eigenvectors(A,output='list');
```

$$m := \left[\left[0,\ 1,\ \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right],\ \left[6,\ 1,\ \left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right],\ \left[-1,\ 1,\ \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right] \right]$$

Počet vlastních čísel.

```
> b:=nops(m):
> r:=RowDimension(A):
```

Generování jednotkové matice.

```
> E:=Matrix(r,shape=identity):
```

Cyklus pro nalezení řešení Psí.

```
> g:=1:
> for p from 1 to b do
> Z[p]:=(A-(m[p][1]).E)^m[p][2];
> xi(p) := NullSpace(Z[p]);
```

```
> c:=nops(xi(p));
> for v from 1 to c do
> Psi[g](t):=sum(((A-m[p][1].E)^l.xi(p)[v]*t^l)/l!,
> l=0..(m[p][2]-1))*ex
> p(m[p][1]*t); g:=g+1;
> end do:
> end do:
```

Cyklus pro vytvoření funkcí z řešení Psí.

```
> for pp from 1 to r do
> z[pp]:=unapply(Psi[pp](t),t);
> end do:
```

Vytvoření matice M(t) z výsledných vektorů.

```
> H(t):=z[1](t):
> for ss from 2 to r do
> H(t):=<H(t)|z[ss](t)>;
> end do:

> M:=unapply(H(t),t):
> M(0):
> MM:=unapply(inverse(M(0)),t):
```

Výsledná matice

```
> U(t):=evalm(M(t)&*MM(t)):
> evalc~(U(t));
```

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{7}e^{(6\,t)}+\frac{4}{7}e^{(-t)} & 1-\frac{3}{7}e^{(6\,t)}-\frac{4}{7}e^{(-t)} & -\frac{1}{2}+\frac{15}{14}e^{(6\,t)}-\frac{4}{7}e^{(-t)} \\ \frac{1}{7}e^{(6\,t)}-\frac{1}{7}e^{(-t)} & 1-\frac{1}{7}e^{(6\,t)}+\frac{1}{7}e^{(-t)} & -\frac{1}{2}+\frac{5}{14}e^{(6\,t)}+\frac{1}{7}e^{(-t)} \\ \frac{2}{7}e^{(6\,t)}-\frac{2}{7}e^{(-t)} & -\frac{2}{7}e^{(6\,t)}+\frac{2}{7}e^{(-t)} & \frac{5}{7}e^{(6\,t)}+\frac{2}{7}e^{(-t)} \end{bmatrix}$$

```
> time() - st;
```

$$0.124$$

6.2 Implementace Putzerovy metody

```
> restart;
> with(Student[LinearAlgebra]):
> with(linalg):
> st := time():
```

Vstupní matice:

```
> A:=Matrix([[4,-2,7],[0,-1,2],[0,-2,4]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Nalezení vlastních čísel matice.

```
> lambda:=eigenvalues(A);
```

$$\lambda := 4, 0, 3$$

Celkový počet řádků matice.

```
> r:=RowDimension(A):
```

Generování jednotkové matice.

```
> E:=Matrix(r,shape=identity):
> P(0):=E:
```

Cyklus pro nalezení matic. P_1 až P_n podle vzorce $\mathrm{P}(k) := (A - \lambda_k\, E)\, P_{k-1}$.

```
> for k from 1 to r do
> P(k):=((A-lambda[k].E).P(k-1));
> od:
> z[0]:=t->0:
> q[1](0)=1:
```

```
> q[1](t)=exp(lambda[1]*t):
> z[1]:=unapply(rhs(%),t):
```

Cyklus pro nalezení q_2(t) až q_n(t) podle vzorce $\int_0^t e^{(-\lambda_j\,(s-t))}\,z_{j-1}(s)\,ds$. Výsledek se ukládá do proměnné z.

```
> for j from 2 to r do
> q[j](0):=0;
> q[j](t)=int(exp(-lambda[j]*(s-t))*z[j-1](s),s=0..t);
> z[j]:=unapply(rhs(%),t);
> od:
```

Výsledná matice:

```
> U(t):=sum(z[l](t)*P(l-1),l=1..r):
> simplify(%):
> evalc~(%);
```

$$\begin{bmatrix} e^{(4\,t)} & -\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\,e^{(4\,t)}+4\,e^{(3\,t)} & \frac{1}{4}+\frac{31}{4}\,e^{(4\,t)}-8\,e^{(3\,t)} \\ 0 & \frac{4}{3}-\frac{1}{3}\,e^{(3\,t)} & -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\,e^{(3\,t)} \\ 0 & \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\,e^{(3\,t)} & \frac{4}{3}\,e^{(3\,t)}-\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

```
> time() - st;
```

$$0.140$$

6.3 Implementace metody rozvoje konečným polynomem

```
> restart;
> with(Student[LinearAlgebra]):
> with(linalg):
> st := time():
```

Vstupní matice

```
> A:=Matrix([[2,-2,7],[1,-1,-2],[2,-2,4]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -2 & 7 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Počet řádků matice

```
> d:=RowDimension(A):
```

Výpis vlastních čísel, jejich algebraické násobnosti a vlastní vektory.

```
> m:=Eigenvectors(A,output='list');
```

$$m := \left[\left[7,\ 1,\ \left\{\begin{bmatrix}\frac{10}{7}\\ \frac{-1}{14}\\ 1\end{bmatrix}\right\}\right],\ \left[0,\ 1,\ \left\{\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\right\}\right],\ \left[-2,\ 1,\ \left\{\begin{bmatrix}\frac{-1}{2}\\ \frac{5}{2}\\ 1\end{bmatrix}\right\}\right]\right]$$

Počet vlastních čísel.

```
> s:=nops(m):
```

Generování jednotkové matice.

```
> E:=Matrix(d,shape=identity):
> g:=1:o:=1:
```

Cyklus pro nalezení rovnic s funkcemi b_0 , b_1,..., b_n .

```
> for w from 1 to s do
> r[g]:=b[0](t)+b[1](t)*m[w][1]+sum(b[l-1](t)*m[w][1]^(l-1),
> l=3..d)=exp(m[w][1]*t):
> g:=g+1:
> if m[w][2]>1 then
> r[g]:=diff(b[0](t)+b[1](t)*lambda[o]+sum(b[l-1](t)*
> lambda[o]^(l-1),l=3..d+m[w][2])=exp(lambda[o]*t),lambda[o]);

> g:=g+1:
> for h from 3 to m[w][2] do
> r[g]:=diff(r[g-1],lambda[o]);
> g:=g+1:
> end do end if;
> lambda[o]:=m[w][1];
> o:=o+1:
> end do:
```

Vynulování nadbytečných funkcí b_n.

```
>  rovnice1:= [seq(b[i],i=d+1..d*2)]:
>  for pp from d to d*2 do
>  b[pp]:=0;
>  end do:

>  rovnice:= [seq(r[i],i=1..d)]: funkce:=[seq(b[i],i=0..(d-1))]:
```

Nalezení řešení soustavy lineárních rovnic.

```
>  v:=solve(rovnice,funkce(t)):
>  for pp from 0 to (d-1) do
>  z[pp]:=unapply(rhs(v[1][pp+1]),t);
>  end do:
```

Výsledná standardní fundamentální matice.

```
>  U(t):=z[0](t)*E+sum(z[j-1](t)*A^(j-1),j=2..d):
>  B:=simplify(%):
>  evalc~(B);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{7}+\frac{1}{9}e^{(-2t)}+\frac{20}{63}e^{(7t)} & \frac{3}{7}-\frac{1}{9}e^{(-2t)}-\frac{20}{63}e^{(7t)} & -\frac{11}{14}-\frac{1}{6}e^{(-2t)}+\frac{20}{21}e^{(7t)} \\ \frac{4}{7}-\frac{5}{9}e^{(-2t)}-\frac{1}{63}e^{(7t)} & \frac{3}{7}+\frac{5}{9}e^{(-2t)}+\frac{1}{63}e^{(7t)} & -\frac{11}{14}+\frac{5}{6}e^{(-2t)}-\frac{1}{21}e^{(7t)} \\ -\frac{2}{9}e^{(-2t)}+\frac{2}{9}e^{(7t)} & \frac{2}{9}e^{(-2t)}-\frac{2}{9}e^{(7t)} & \frac{1}{3}e^{(-2t)}+\frac{2}{3}e^{(7t)} \end{bmatrix}$$

```
>  time() - st;
```

$$0.125$$

7 Závěr

V této práci jsem se věnovala popisu metod k nalezení řešení homogenních soustav lineárních odr. Konkrétně metodě rozkladu na Jordanův kanonický tvar, metodě rozkladu, Putzerově metodě a metodě rozvoje konečným polynomem. Názorně byly všechny metody ukázány na jednoduchých příkladech. Pak jsem metody naprogramovala v programovacím prostředí Maple.

Algoritmus každé metody byl názorně popsán na vhodně zvolené matici. Dále byly zvoleny matice řádu 4, 5, 10 a 15, na kterých byla testována efektivita algoritmu měřením času Putzerovy metody, metody rozkladu a metody rozvoje konečným polynomem. Pro srovnání byla měřena i zabudovaná maplovská funkce *exponential*. Zjištěné hodnoty najdeme v příloze A. Měření se na maticích řádu 4, 5 a 10 opakovalo desetkrát a získané hodnoty byly zprůměrovány. Pro ukázku jsme matici řádu 15 zvolili tak, že vlastní čísla nejsou celá. U této matice naměřené hodnoty dosahovali i desítek minut, proto bylo měření uděláno pouze třikrát pro každou metodu (viz. tabulka 4). Některá měření ovšem musela být opakována z důvodu nedostatku paměti počítače. Ještě poznamenejme, že časy můžou být mírně zkreslené z důvodu proměnlivého výkonu počítače. Nejvyšších časů ve všech případech dosahuje Putzerova metoda, je to dáno tím, že hodně času zabírá nalezení funkcí $q_2, ..., q_n$, tato část je zřejmě hodně náročná na výpočet díky rekurzivním výpočtům určitých integrálů. Hodnota této dílčí části zabírá polovinu až tři čtvrtiny výsledného času. Pro názornost v tabulce 5 můžeme vidět časy, kterých Putzerova metoda dosahuje při předem nalezených $q_2, ..., q_n$. Tímto zjednodušením se dosahuje nejlepších časů z daných tří metod. Metoda rozvoje konečným polynomem bývá nejefektivnější u malých matic, jak můžeme vidět v tabulce 3. U větších matic už dosahuje podobných výsledků jako metoda rozkladu viz. tabulka 2.

Metoda rozkladu na Jordanův kanonický tvar byla popsána pouze na vybraném příkladu. Z důvodu velké náročnosti, nebyla tato metoda implementována obecně.

Vyjádření času v procentech

matice	Putzerova m.	Metoda rozvoje	Metoda rozkladu	Funkce exponential
4x4	36	33	24	7
5x5	38	23	31	8
10x10	49	21	21	9

8 Reference

[1] J. Nagy, *Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic,* SNTL, Praha, 1983.

[2] E. J. Putzer, *Avoiding the Jordan Canonical Form in the Discussion of Linear Systems with Constant Coefficients,* Amer. Math. Monthly, 1966.

[3] B. Krajc, P. Beremlijski, *Obyčejné diferenciální rovnice,* mi21, http://mi21.vsb.cz/modul/obycejne-diferencialni-rovnice, 2012.

[4] J. Bečvár, *Lineární algebra,* MATFYZPRESS, Praha, 2000.

[5] J. B. Fraleigh, R. A. Beauregard, *Linear Algebra,* Addison-Wesley Publishing company, USA/England, 1990.

[6] Z. Dostál, *Lineární algebra,* VŠB-TUO, Ostrava, 2004.

A Měření

Poznámka A.1 Naměřené hodnoty jsou udávány v sekundách.

Výsledky měření matice 4x4.

$$A := \begin{bmatrix} 97 & -42 & -32 & -16 \\ 10 & -6 & \frac{-5}{2} & \frac{-5}{3} \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 564 & -240 & -184 & -93 \end{bmatrix}$$

	Putzerova m.	Metoda rozvoje	Metoda rozkladu	Funkce exponential
	0.156	0.109	0.11	0.031
	0.125	0.124	0.47	0.031
	0.125	0.094	0.078	0.015
	0.14	0.078	0.109	0.031
	0.109	0.110	0.125	0.016
	0.109	0.125	0.078	0.016
	0.094	0.109	0.092	0.031
	0.109	0.109	0.074	0.031
	0.14	0.125	0.109	0.015
	0.109	0.141	0.109	0.031
průměr	0.122	0.112	0.083	0.025

Tabulka 1

Výsledky měření matice 5x5.

$$A := \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 10 & 0 & 6 & -6 \\ -10 & 11 & 3 & 10 & -11 \\ 7 & -7 & 0 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

	Putzerova m.	Metoda rozvoje	Metoda rozkladu	Funkce exponential
	0.14	0.093	0.109	0.016
	0.14	0.031	0.11	0.032
	0.125	0.078	0.094	0.031
	0.14	0.094	0.109	0.031
	0.11	0.093	0.109	0.015
	0.14	0.072	0.109	0.016
	0.109	0.093	0.125	0.032
	0.14	0.109	0.094	0.031
	0.156	0.062	0.078	0.031
	0.109	0.078	0.125	0.031
průměr	0.131	0.08	0.106	0.026

Tabulka 2

Výsledky měření matice 10x10.

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 11 & 18 & -11 & 3 & 28 & 21 & -8 & 4 \\ 13 & 1 & -34 & -50 & 51 & -3 & -75 & -75 & 27 & 3 \\ -9 & 3 & 30 & 33 & -42 & 5 & 52 & 62 & -23 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & -7 & 5 & 3 & 14 & -3 & 5 \\ -9 & 2 & 21 & 19 & -30 & 2 & 31 & 43 & -15 & 1 \\ -5 & 3 & 12 & 6 & -19 & 4 & 10 & 27 & -8 & 3 \\ 3 & -3 & -13 & -13 & 18 & -3 & -18 & -29 & 10 & -5 \\ -4 & 0 & 10 & 13 & -14 & 0 & 20 & 21 & -8 & 0 \\ 2 & -3 & -6 & 2 & 7 & -1 & 2 & -10 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & -11 & -7 & 13 & -2 & -12 & -20 & 8 & -5 \end{bmatrix}$$

	Putzerova m.	Metoda rozvoje	Metoda rozkladu	Funkce exponential
	0.844	0.375	0.422	0.156
	0.875	0.36	0.359	0.14
	0.938	0.406	0.344	0.156
	0.828	0.391	0.39	0.14
	0.828	0.407	0.375	0.14
	0.86	0.36	0.359	0.187
	0.891	0.375	0.375	0.156
	0.844	0.359	0.391	0.172
	0.813	0.375	0.375	0.141
	0.875	0.36	0.406	0.156
průměr	0.8596	0.3768	0.3796	0.154

Tabulka 3

Výsledky měření matice 15x15.

	Putzerova m.	Metoda rozvoje	Metoda rozkladu
	2350.687	864.578	873.863
	2403.89	847.438	876.573
	2396.72	851.371	856.374
průměr	2383	854	868

Tabulka 4

Výsledky měření Putzerovy metody s vloženými nalezenými funkcemi $q_2, ..., q_n$ pro matici řádu 5 a 10.

Typ matice	5x5	10x10
	0.062	0.328
	0.093	0.297
	0.078	0.265
	0.093	0.296
	0.109	0.281
	0.093	0.297
	0.062	0.265
	0.063	0.265
	0.078	0.281
	0.109	0.281
průměr	0.084	0.286

Tabulka 5